Chapitre III : Modélisation des rotors

# Introduction

Au chapitre II, la résolution de l’équation de Reynolds et de l’énergie est présentée en vue de calculer les flux thermiques et la force hydrodynamique générés au sein du palier. Ces deux informations seront utilisées par les modèles thermomécanique et dynamique des rotors détaillés dans ce chapitre afin de réaliser l’analyse de l’effet Morton.

A propos des rotors, ils représentent un élément essentiel constituant les machines tournantes. Leur comportement dynamique concerne directement la sécurité de l’exploitation, la maintenance et la performance des machines. Par conséquent, la prédiction du comportement dynamique des rotors constitue un thème de recherche depuis très longtemps. Dans ce contexte, la littérature comprend de nombreux ouvrages qui présentent les phénomènes liés à la dynamique des machines tournantes [3]-[5]. Ces rotors sont modélisés de manière rigide ou flexible montés sur des paliers modélisés de manière linéaire ou non linéaire. Bien que ces modèles des rotors soient conçus pour effectuer des analyses de la dynamique des rotors classiques, ils pourraient également être utilisés dans l’analyse de l’effet Morton. Ces modèles dynamiques permettent de connaitre le niveau de vibrations sous différentes conditions de fonctionnement, sachant que l’effet Morton modifie progressivement ces conditions de fonctionnement dans le temps.

Dans ce chapitre, le modèle thermomécanique du rotor basé sur la méthode d’éléments finis est présenté dans un premier temps. Il permet de prédire la déformation thermique du rotor suite à l’échauffement du fluide dans le palier. Ensuite, une partie concernant la modélisation et les analyses de la dynamique des rotors est décrite. Deux modèles dynamiques des rotors utilisées pour analyser l’effet Morton sont exposés, à savoir un rotor rigide à quatre degrés de liberté et un rotor flexible à N degrés de liberté. En utilisant ces deux modèles, le système des équations du mouvement du rotor est établi. Sa résolution en transitoire est effectuée grâce à une méthode d’intégration temporelle qui combine la méthode de Newton-Raphson avec le schéma d’intégration temporelle de Newmark. Enfin, deux approches de la modélisation du balourd thermique sont décrites. Elles permettent de prendre en compte l’influence de la déformation thermique du rotor sur son comportement dynamique.

# modèle thermomécanique des rotors

Suite à l’échauffement non homogène du fluide dans le palier, le rotor se déforme thermiquement. Cette déformation thermique se compose d’une dilatation radiale et une flexion thermique quand une chaleur asymétrique y est appliquée [1] ***Figure 1***. Son influence apportée sur le comportement dynamique du rotor se divise en deux types suivants :

* la dilatation thermique change l’épaisseur du film mince dans le palier hydrodynamique et se peut influencer la force fluide exercée sur le rotor
* la flexion thermique défléchit la fibre neutre du rotor de l’axe de rotation, ce qui entraine une source d’excitation synchrone (balourd ou défaut de fibre neutre). Par abus de langage, cette source vibratoire est souvent dénommée balourd thermique.

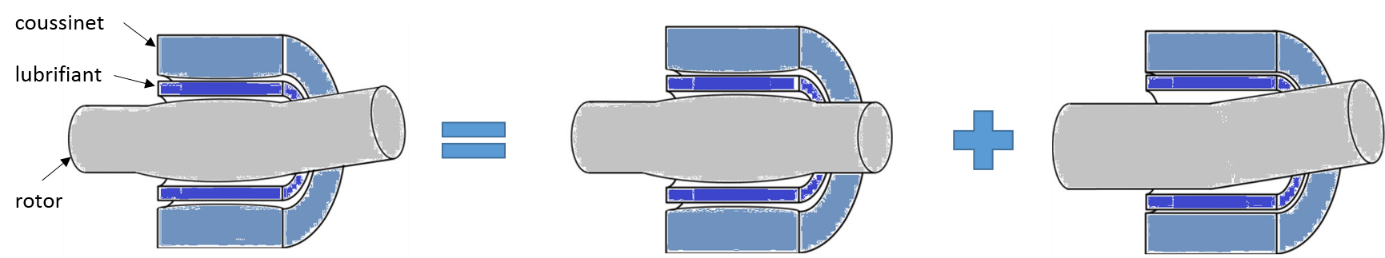


Figure 1 : déformation thermique de rotor

Dans cette thèse, On concentre uniquement sur l’influence du balourd thermique sur le comportement dynamique du rotor. La modélisation du balourd thermique est détaillée dans la section 4. Elle nécessite de connaitre la déflexion de la fibre neutre suite à la déformation thermique. Le modèle thermomécanique des rotors décrit dans cette section sert donc à évaluer la déflexion de la fibre neutre sous le chargement thermique.

## modèle thermique linéaire

### Loi de Fourier

Le mode principal du transfert de chaleur dans le rotor est la conduction et la loi de comportement communément utilisée est la loi de Fourier. En fait, lors de la présence d’un gradient de température dans ces milieux continus, le flux thermique transite du milieu le plus chaud vers le milieu le plus froid. Cette loi donne la relation entre le vecteur de la densité de flux thermique , le gradient de température et la conductivité thermique du milieu étudié par la formule suivante :

|  |  |
| --- | --- |

Le signe négatif dans cette loi est introduit pour respecter la seconde loi de la thermodynamique qui annonce que la chaleur se diffuse des zones chaudes vers celles froides.

Après analyser l’environnement extérieur qui entoure le rotor, en réalisant un bilan d’énergie et appliquant la conservation de l’énergie, l’équation de la chaleur dans le cas du rotor homogène est de la forme suivante :

|  |  |
| --- | --- |

avec

: masse volumique

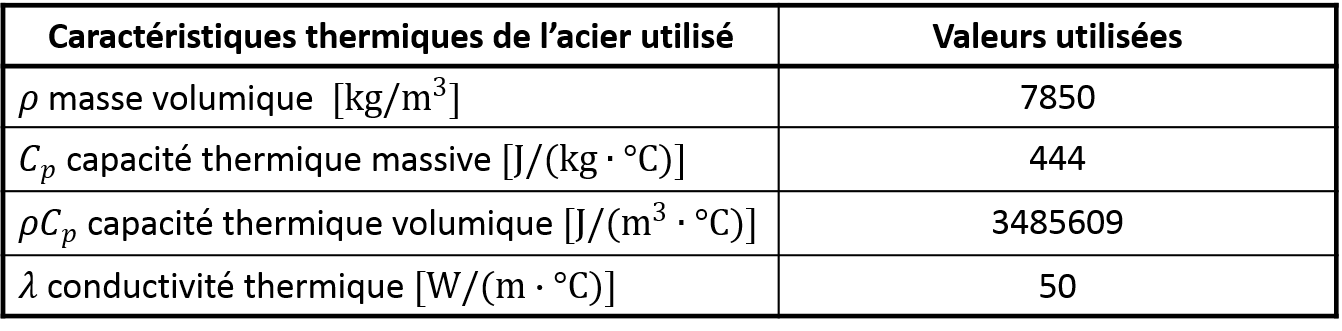
: capacité thermique massive

: conductivité thermique

: capacité thermique volumique

Le rotor en acier est supposé isotrope et ses caractéristiques sont indépendantes de la température et détaillé dans le Tableau *1*.

Tableau 1 : caractéristiques thermiques de l’acier utilisé



### Conditions aux limites en thermique

Dans le cas de modélisation thermique du rotor, il existe différents types de conditions aux limites en thermique. Elles traduisent les échanges de chaleur entre le rotor et son environnement extérieur (lubrifiant du palier, air, etc…). L’application de ces types de conditions aux limites thermiques est illustrée en se basant sur le rotor du banc de l’effet Morton utilisé dans cette thèse (***Figure 2***).

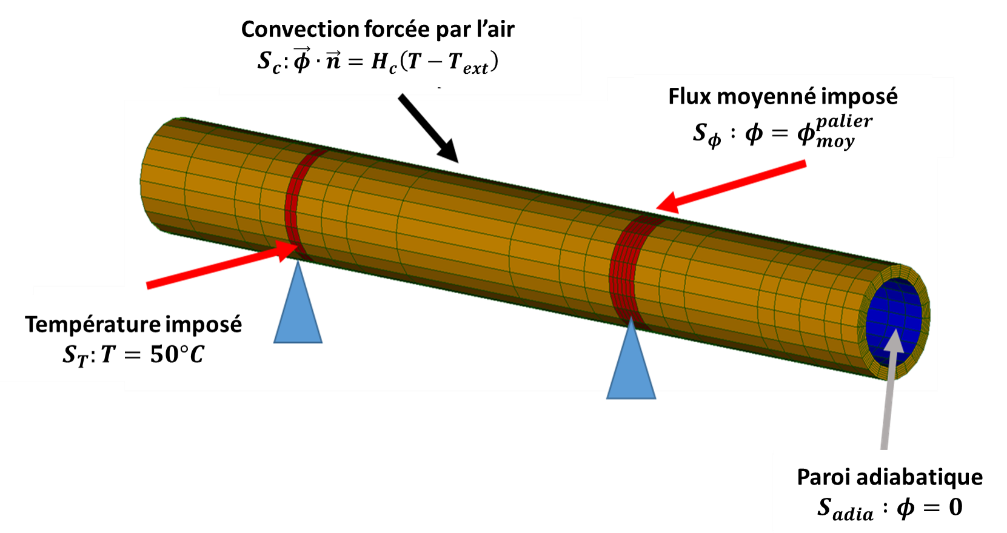


Figure 2 : Conditions aux limites en thermique au cas du banc de l’effet Morton

* Convection

Le phénomène de convection thermique traduit les échanges de chaleur avec l’air. Ces échanges sont réalisés de manière forcés, car le rotor tourne à une vitesse importante. Une variation de température entre la température du milieu extérieur et celle du rotor est imposée à la surface jaune. La condition de convection à travers cette surface s’écrit :

| sur |  |
| --- | --- |

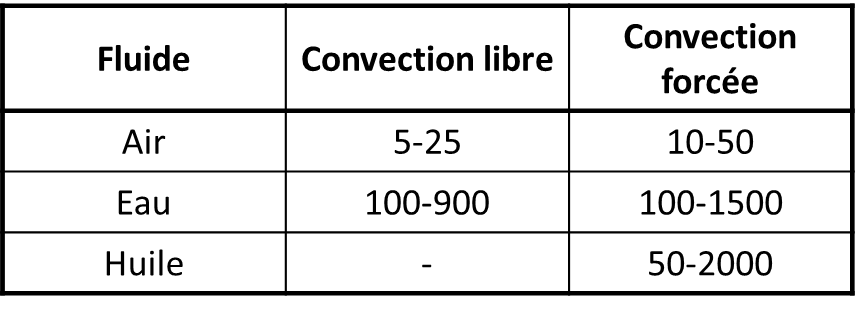
avec

est la normale à la surface

est le coefficient de convection ou d’échange en

Le coefficient de convection dépend du milieu extérieur et du caractère forcé ou non de l’échange. Le tableau à l’issue de [10] donne quelques ordres de grandeur de ce coefficient.

Tableau 2 : Ordres de grandeur du coefficient de convection thermique



* Flux imposé

Cette condition aux limites est appliquée à la surface d’interaction lubrifiant-rotor, notée, au niveau du palier hydrodynamique. En utilisant le modèle complet du palier, le flux thermique à l’interface fluide-structure peut être calculé par la résolution de l’équation de l’énergie du film mince. Une démarche du moyennage de ce flux dans le temps, détaillé dans la section XXX, est utilisée pour réduire le temps de calcul. En outre, puisque l’espace à l’intérieur du rotor creux forme une espace enfermée qui est isolé thermiquement du milieu extérieur, un flux nul est imposé à la surface intérieure du rotor, pour traduire la paroi adiabatique.

* Température imposée

Cette condition aux limites est utilisée pour représenter l’échauffement du roulement utilisé dans le cadre de cette thèse. La surface sur laquelle cette condition est appliquée est nommée.

### Résolution en transitoire

La résolution des équations de la chaleur en transitoire permet d’avoir le champ de température du rotor dans le temps. Sa résolution au sein du rotor fait appeler la méthode des éléments finis en mécanique du solide. Une synthèse de sa démarche pour résoudre la mécanique de solide en thermique par la méthode des éléments finis est détaillée en **Annexe 6**. Après la discrétisation en espace de l’équation de chaleur (**Eq.2**), le système des équations différentielles du premier ordre est obtenu :

|  |  |
| --- | --- |

Avec

vecteur des températures nodales

**M** : matrice de masse thermique

matrice de rigidité thermique

vecteur du second membre.

Sa résolution en transitoire est généralement réalisée avec deux types de schéma de l’intégration temporelle (explicite et implicite). Si un pas de temps est utilisé pour la discrétisation temporelle et un schéma explicite est utilisé pour l’intégration temporelle, à l’instant (), l’équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** peut être développée sous forme :

|  |  |
| --- | --- |

Il faut souligner que le pas de temps est délimité par le rayon spectral de la matrice, correspondant à la valeur maximum des valeurs propres données par la matrice. Pour que le schéma explicite utilisé soit stable, le rayon spectral doit être inférieur à 1.

|  |  |
| --- | --- |

La simulation de l’effet Morton utilise-méthode [11] pour discrétiser l’**Eq.4** dans le temps par un schéma aux différences finies.

|  |  |
| --- | --- |

Avec

Quand , le schéma est explicite, la stabilité du schéma dépend de la valeur propre de la matrice . Quand, le schéma devient implicite. Selon la référence CodeAster© [11], si le schéma est inconditionnellement stable, alors que lors du paramètre, la méthode est stable si le pas de temps vérifie la condition suivante :

| Avec , le mode propre maximum |  |
| --- | --- |

Dans le cadre de la thèse, le progiciel CodeAster© développé chez l’entreprise EDF fournie l’outil des éléments finis qui assure la résolution numérique de l’équation de la chaleur.

## modèle de déformation thermique

### Equation de comportement thermomécanique

Une fois le champ de température est obtenu, la déformation thermique du rotor peut être ensuite déterminée et la notion du couplage thermomécanique est ainsi introduite. Ce couplage ici est un couplage faible, car seulement les effets thermiques sur la mécanique sont considérés. Les effets inverses, c’est à dire que les effets mécaniques sur ceux-ci de la thermique qui entrainent les élévations de température dues aux déformations, ne sont pas considérés.

Quand les effets de dilatation thermique sont pris en compte, le couplage thermomécanique se fait par la relation de comportement qui s’écrit :

|  |  |
| --- | --- |

Ou dans l’autre sens :

|  |  |
| --- | --- |

avec

est la matrice du comportement élastique.

est le coefficient de Lamé

est le module de cisaillement

est le module de Young.

est le coefficient de Poisson.

est le vecteur identité au sens de la représentation vectorielle des contraintes et des déformations.

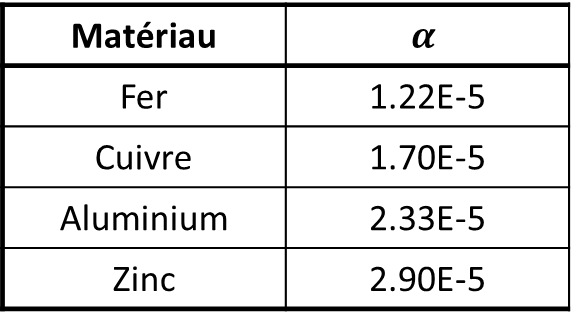
Cette relation de comportement exprime que :

– s’il y a élévation de température (), il peut y avoir dilatation (les composantes de cisaillement ne sont pas affectées) sans contrainte ().

– s’il y a élévation de température sans possibilité de déformation, il y a compression du milieu qui est équivalent à une contrainte de compression à l’origine thermique.

est le coefficient de dilatation thermique exprimé en. Il est un paramètre scalaire dans le cas de la dilatation thermique isotrope. Le Tableau *3* issu de [10] présente de ses valeurs pour quelques matériaux usuels.

Tableau 3 : Ordres de grandeur du coefficient de dilatation thermique



Quand la déformation thermique sur une structure libre sous l’effet d’une élévation de température se fait sans création de contrainte, l’expression de la dilation thermique est déduite :

|  |  |
| --- | --- |

### Condition aux limites mécanique

Différent d’une structure libre, lors du calcul de la déformation thermique, le rotor est supporté par les paliers qui créent les forces en fonction de la position latérale du rotor. Ces forces produisent les champs de contrainte locale aux interfaces rotor-palier ou rotor-roulement qui permettent de contraindre le système rotor. Afin de prendre en compte cette condition aux limites mécanique, les forces générées aux paliers sont distribué aux nœuds du rotor présenté aux interfaces. Cette implémentation de la condition aux limites mécanique est assurée par une liaison RBE3 définie dans le CodeAster [12]. La liaison RBE3 définit la relation cinématique linéaire qui a pour effet de distribuer les efforts appliqués au nœud maître sur les nœuds esclaves. Deux points fictifs, confondus avec deux nœuds des paliers dans le modèle dynamique des rotors, jouent le rôle du nœud maître sur lequel la force du palier ou du roulement est appliquée. Les nœuds à la surface du rotor au droit du palier ou du roulement sont les nœuds esclaves. Les hypothèses de construction des contraintes linéaires imposent, pour chaque nœud esclave, une répartition des efforts pondérée par la distance entre le nœud maître et le nœud esclave. Ainsi, lors de l’application d’une force au nœud maître, la force sera également transmise aux nœuds esclaves du rotor par cette liaison RBE3.

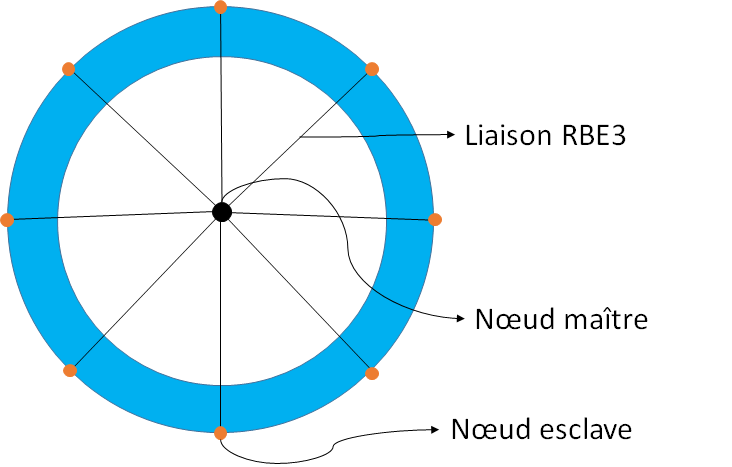


Figure 3 : liaison RBE3 au niveau du roulement ou du palier

En outre, afin de contraindre la translation et la rotation axiale, les degrés de liberté de déplacement et la rotation au niveau du roulement sont bloqué. La condition aux limites mécanique lors de la résolution du problème thermomécanique est résumée dans laFigure *4*.

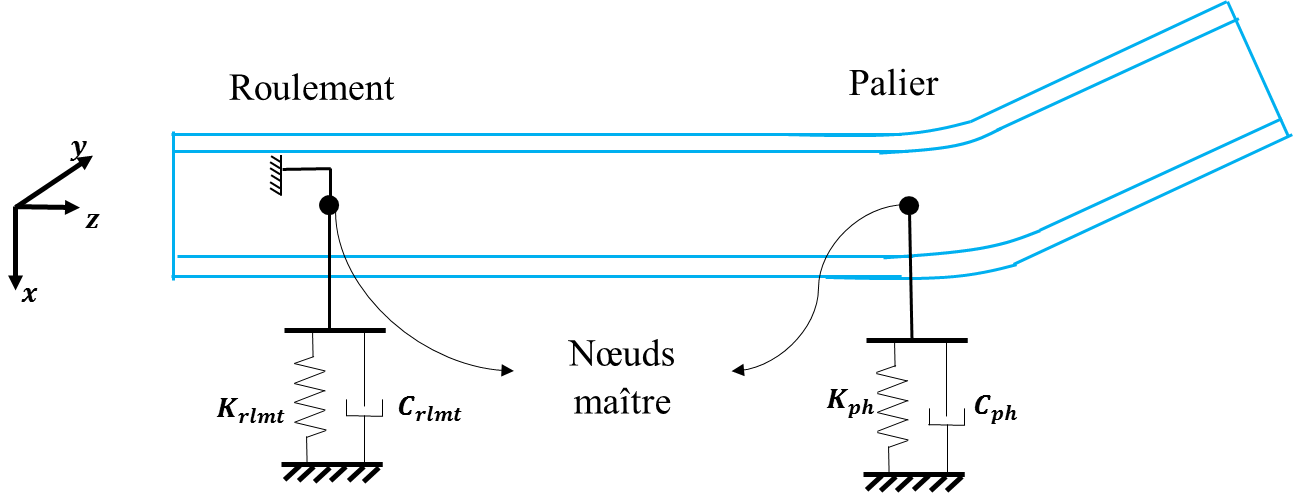


Figure 4 : Conditions aux limites mécaniques du modèle thermomécanique du rotor

La déformation thermique du rotor peut être calculée après avoir le champ de température et après appliquer les conditions aux limites mécaniques. Les déplacements nodaux du modèle de rotor en 3D dû à l’effet thermique sont ensuite obtenus. La résolution du problème utilise également la méthode des éléments finis. Elle partage le même maillage avec le modèle thermique et est réalisé par le CodeAster©.

### déplacement de la fibre neutre du rotor

En théorie de poutre, la fibre neutre désigne une ligne passante par le centre de gravité des sections droites du rotor. Dans le cas général, sans la déformation thermique ou avec la dilatation thermique homogène, la fibre neutre est confondue avec l’axe de rotation. Dans le cas de l’effet Morton, sous le chargement thermique asymétrique, la fibre neutre dévie de l’axe de rotation (Figure *5*) et la déformation thermique du rotor obtenue permet de caractériser cette déviation de la fibre neutre du rotor par rapport à son axe de rotation.

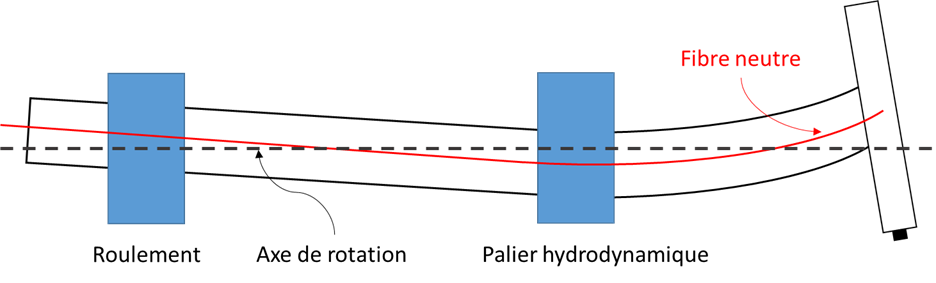


Figure 5 : Déformation thermique du rotor dans le cas de l’effet Morton

Pour caractériser cette déviation de la fibre neutre, il suffit de calculer la position du centre de gravité de chaque section droite du rotor après la déformation thermique. Pour une section du rotor composé de sous-ensembles dont les centres de gravité sont et les poids , son centre de gravité est le barycentre des pondérés par les poids.

|  |  |
| --- | --- |

où est le poids total, .

Quand les sous-ensembles sont délimités de manière identique, le poids total est. Le calcul de la position du centre de gravité d’une section revient à calculer la moyenne des centres de gravité par la formule suivante :

|  |  |
| --- | --- |

Les centres des sous-ensembles peuvent être représentés par les nœuds du maillage dans une section droite du modèle du rotor 3D. Ainsi, le déplacement nodal après la déformation thermique permet de déterminer la déviation de la fibre neutre. Cette déviation est ensuite utilisée par les deux approches de modélisation du balourd thermique présenté dans la section 4.

# modèles dynamiques des rotors

## Rotor rigide à 4DDL

Le rotor peut être considéré un solide indéformable (i.e. infiniment rigide) si la première fréquence du mode de flexion est très importante devant les fréquences d’intérêt et/ou d’excitation. Par conséquent, les mouvements latéraux peuvent être décrits à l’aide de quatre degrés de liberté : deux translations et deux rotations.

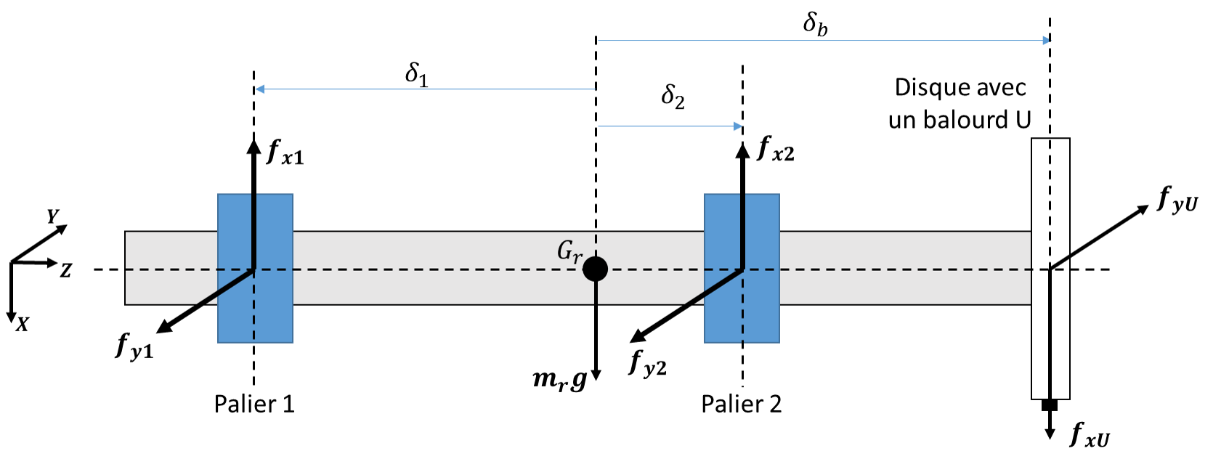


Figure 6 : schéma du rotor rigide avec un disque guidé par deux paliers

La ***Figure 6*** illustre un rotor supposé rigide avec un disque en porte-à-faux guidé par deux paliers. En se basant sur la modélisation à quatre degrés de liberté, les équations de mouvement s’écrivent au centre de masse du rotor de manière suivante:

|  |  |
| --- | --- |

Où

 : translation du centre de masse G dans les directions X et Y

: rotations autour de l’axe X et de l’axe Y

et : le moment d’inertie diamétral et polaire du rotor (arbre + disque)

et : les forces fluides générées au niveau des deux paliers

: la force du balourd positionné au disque.

: les distances algébriques définies comme :

|  |  |
| --- | --- |

Les déplacements[[1]](#footnote-1) au niveau des paliers et sont liés aux déplacements du centre de masse du rotor par:

|  |  |
| --- | --- |

Lorsque les déplacements au niveau d’un palier hydrodynamique sont faibles, les efforts fluides peuvent être linéarisé autour d’une position d’équilibre statique à l’aide de coefficients dynamiques linéaires (coefficients de raideur et d’amortissement). En utilisant ces coefficients dynamiques, les efforts fluides de palier agissants sur le rotor peuvent être exprimés :

|  |  |
| --- | --- |

Si on exprime ces forces par les paramètres cinématiques au centre de masse du rotor, **Eq.17** devient :

|  |  |
| --- | --- |

Ainsi en remplaçant les forces des paliers dans Eq.14 par leurs expressions (**Eq.18**), les équations du mouvement se mettent sous la forme matricielle suivante :

|  |  |
| --- | --- |

où ,

Cette équation peut être utilisée pour connaitre le niveau de vibration au niveau du palier et du disque lors de la simulation de l’effet Morton. Cependant, dans ce cas, la vibration est souvent accompagnée par le grand déplacement du rotor qui rend l’hypothèse de linéarisation des forces fluides non valable. Ainsi, la force calculée par les coefficients dynamiques est peu précise. A cause de cette raison, il est indispensable d’utiliser le modèle complet du palier, appelé modèle non linéaire de palier, qui résous l’équation de Reynolds couplée avec l’équation de l’énergie en régime transitoire, afin d’évaluer les forces fluides de manière précise.

## Rotor flexible à NDDL

Dans la section précédente, un modèle du rotor rigide a été proposé pour réaliser l’analyse dynamique des rotors. Cependant, de nombreux rotors ne peuvent pas être simplement modélisés comme un corps rigide. Par exemple, les rotors ont un petit diamètre par rapport à leur longueur. Ces rotors peuvent vibrer même s'ils sont supportés par un palier rigide sur des supports rigides. D’une manière générale, si la première fréquence du mode de flexion est proche de la fréquence de l’excitation, un modèle du rotor flexible à N degrés de liberté est nécessaire pour présenter correctement son comportement dynamique.

La modélisation de tel rotor s’est basée généralement sur la méthode d’éléments finis. La démarche en détail de cette méthode est largement décrite dans les ouvrages (voir [3]-[5]). Pour rappeler, une synthèse de la méthode utilisée en dynamiques des rotors est décrite ensuite.

La modélisation des rotors par la méthode d’éléments finis en dynamique des rotors revient à développer et de mettre en place un système des équations différentielles du mouvement sous forme matricielle à l’aide des éléments appropriés. Ces éléments permettent de modéliser tous les composants essentiels du rotor tels que l’arbre, le disque, la source d’excitation et le palier.

### Arbre

L’arbre est modélisé par des éléments finis de poutre basés sur la théorie des poutres de TimoShenko. Ces éléments sont utilisé pour discrétiser l’arbre en éléments appelés "éléments d’arbre". Pour un élément d’arbre (***Figure 7***), il comprend deux nœuds et sur l’axe, chacun de ses nœuds possède quatre degrés de liberté pour décrire son mouvement local. À partir du mouvement de ces nœuds et les fonctions de forme, les mouvements sur tous le domaine étudié (i.e. arbre entier) peuvent être interpolé et approximé. Ainsi, les calculs de l’énergie cinétique et celle de déformation de l’arbre deviennent possibles selon la théorie de la résistance des matériaux. C’est à partir des expressions mathématiques des énergies que les matrices élémentaires de raideur , de masse et de gyroscope qui modélisent le comportement de chaque élément d’arbre sont déduites. Il faut souligner que ces matrices élémentaires peuvent être évoluées en fonction des hypothèses faites sur l’élément d’arbre. Typiquement, la construction des matrices et en utilisant la poutre de Timoshenko est différent de ceux-ci en se basant sur la poutre d’Euler-Bernoulli, cette dernière ayant négligé l’effet de cisaillement et inertie de rotation. Une fois toutes les matrices élémentaires sont obtenues, l’assemblage de ces matrices dans un système matriciel dedegrés de liberté permet d’avoir la matrice de mass , de raideur et de gyroscope pour l’arbre entier. Ces matrices seront utilisées pour établir le système des équations différentielles du mouvement du rotor.

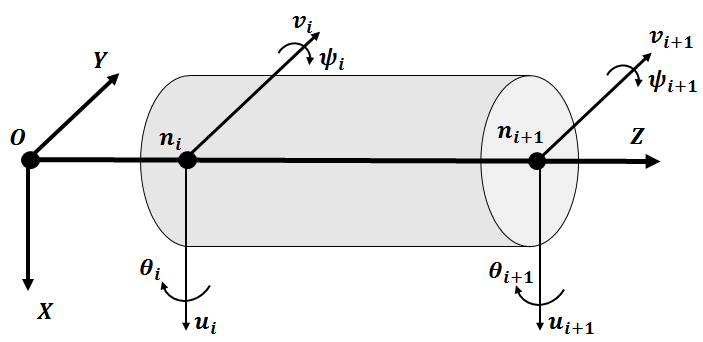


Figure 7 : l’élément d’arbre

### Disque

Le disque est modélisé par un élément fini de nœud situé au centre de masse du disque, celui-ci étant souvent confondu avec un nœud de l’élément d’arbre. Comme mentionné dans la section **3.2.1**, le nœud de l’élément d’arbre possède 4 degrés de liberté, l’élément du disque partage ces degrés de liberté avec le nœud du disque. Souvent supposant être rigide, le disque ne contient pas d’énergie de déformation. Ses matrices élémentaires de masse et de gyroscope peuvent être déduites à partir de seulement l’énergie cinétique sur laquelle l’équation de Lagrange est appliquée.

### Sources d’excitation synchrones

Les sources d’excitation sur le système tournant sont diverses. Dans le cadre de cette thèse, l’intérêt se porte particulièrement sur les sources d’excitation synchrones telles que le balourd et le défaut de fibre neutre, car celles-ci sont à l’origine de l’effet Morton.

Concernant la modélisation du balourd, il est modélisé à l’aide d’un élément fini de nœud confondu avec un nœud de l’arbre. Différent de la modélisation d’arbre et de disque, le balourd est traité comme une force extérieure périodique qui appliqué sur le rotor. Il existe également le moment de balourd engendré par la rotation de disque dans les plans parallèles à l’axe de rotation [5]. Dans cette thèse, seule la force de balourd est considérée. Le vecteur de la force nodale de balourd est décrit :

|  |  |
| --- | --- |

où :

masse du balourd

excentricité du centre géométrique de l’arbre

vitesse de rotation

phase du balourd par rapport à l’axe

: numéro du nœud sur le rotor flexible sur lequel la force du balourd est appliqué.

Lors de la modélisation de l’effet Morton, on peut également rencontrer une sollicitation périodique interne engendré par la flexion thermique du rotor. Le fait que la flexion thermique du rotor dévie la fibre neutre du rotor par rapport à l’axe de rotation, un défaut de fibre neutre est ainsi crée. La modélisation de cette source d’excitation sera discuté en détaillée dans la partie 0.

### Paliers

Le palier est modélisé en utilisant un élément de nœud positionné au centre de la section de l’arbre. Il partage les quatre degrés de liberté attribués au nœud de l’arbre où se positionne le palier. A partir du mouvement de ce nœud et, le vecteur de la force nodale linéaire, appliquée du palier au rotor, peut être représentée par l’approche des coefficients dynamiques (**Eq.21**).

|  |  |
| --- | --- |

Ces coefficients dynamiques peuvent être directement assemblés dans les matrices globales de raideur et d’amortissement du système rotor. Cette démarche est souvent utilisée dans l’analyse modale et l’analyse de stabilité, car elle permet de calculer directement les valeurs propres et les vecteurs propres du système simplement par les matrices globales de masse, de raideur et d’amortissement.

Lors de la modélisation de l’effet Morton, à cause de l’hypothèse de linéarisation des forces fluides susceptible d’être non valable, la démarche linéaire risque d’introduire d’erreur. Ainsi, il est préférable d’utiliser le modèle non-linéaire de palier qui a été présenté au chapitre II pour calculer la force du palier. Compte tenu de l’expression (*Eq.II.33*), le vecteur des forces nodales non linéaires de l’élément fini de palier est donné par :

|  |  |
| --- | --- |

### Equation du mouvement

Les matrices élémentaires et les vecteurs des forces nodales sont assemblés de manière appropriée. Les matrices et les vecteurs assemblés sont généralement appelés les matrices globales et les vecteurs globaux. Ils sont respectivement de dimensions et où est le nombre total de degrés de liberté du système rotor. Les équations différentielles de mouvement du système rotor flexible sont ainsi écrites sous forme matricielle :

|  |  |
| --- | --- |

où:

* et sont respectivement les vecteurs d’accélération, de vitesse et de déplacement globaux rangés de manière correspondante à la connectivité des éléments finis.
* et sont respectivement la matrice globale de masse, d’amortissement, de gyroscope et de raideur.
* et sont respectivement le vecteur global de la force des balourds, de la force de gravité et des forces générées dans les paliers.

## Méthode numérique d’intégration temporelles

Comme mentionné précédemment, le modèle linéaire du palier est imprécis pour le grand déplacement du rotor, qui est souvent rencontré lors de l’analyse de l’effet Morton. De plus, afin de connaitre le flux thermique qui s’échange entre le fluide lubrifiant et le rotor, la résolution de l’équation de l’énergie pour le film mince est également nécessaire. Pour ces deux raisons, il est inévitable de résoudre simultanément les équations du mouvement du rotor et les équations de lubrification hydrodynamique en transitoire et la résolution des équations devient un problème dynamique non linéaire. Afin de résoudre de manière efficace les équations du mouvement, une méthode d’intégration temporelle qui combine la méthode de Newton-Raphson avec le schéma d’intégration temporelle de Newmark est utilisée [7].

Dans un premier temps, l’équation du mouvement **Eq.23** est discrétisée par pas de temps. A l’instant (), elle peut s’exprimer comme **Eq.24** pour faciliter la compréhension.

|  |  |
| --- | --- |

Cette équation est non linéaire en raison que le calcul de l’accélération à du système rotor a besoin de connaitre la force non linéaire du palier qui dépend du déplacement et de la vitesse du rotor à au niveau du palier. Les vecteurs du déplacement et de la vitesse des nœuds du rotor entre les instants et (où est le pas de temps) sont approximés par le schéma implicite de Newmark :

|  |  |
| --- | --- |

où les paramètres et sont utilisés et ils définissent le schéma correspondant à une accélération moyenne qui assure une stabilité numérique inconditionnellement.

Etant donné que le calcul de l’accélération est non linéaire, une stratégie itérative basée sur la méthode de Newton-Raphson est mise en place pour traiter la non-linéarité due au problème de lubrification hydrodynamique de palier. D’après cette stratégie itérative, les vecteurs du déplacementet de la vitessesont cherchés de manière précise et itérative comme limite d’une suite des vecteurs dont les éléments sont consécutivement corrigés. L’indice signifie le nombre d’itération de la Newton-Raphson. Afin de faciliter l’implémentation de la méthode, les équations Eq.25 sont exprimées sous la forme d’un vecteur résiduel (Eq.26) qui contient le vecteur résiduel du déplacement et de la vitesse.

|  |  |
| --- | --- |

Le vecteur résiduel peut être exprimé en utilisant le développement limité en série de Taylor à l’ordre 1 au voisinage du vecteur de déplacement ou de la vitesse. La linéarisation du vecteur résiduel permet d’obtenir :

|  |  |
| --- | --- |

Après le rangement des expressions, la formule essentielle de la méthode Newton-Raphson est obtenue et il permet de calculer le vecteur d’incrément de correction.

|  |  |
| --- | --- |

où est la matrice jacobienne de cette méthode d’intégration temporelle.

Après la résolution, la correction sur les vecteurs du déplacement et de la vitesse peut être réalisée :

|  |  |
| --- | --- |

Cette correction est répété de manière itérative jusqu’à la norme du vecteur résiduel descend au-dessous d’une tolérance petite, e.g. 1E-3.

La matrice jacobienne est en fonction du vecteur de déplacement et de vitesse. Compte tenu des dépendances et des calculs du dérivé de chaque terme, elle peut s’écrit :

|  |  |
| --- | --- |

Le dérivé d’accélération (Eq.24) par rapport au déplacement et à la vitesse revient à calculer la raideur et l’amortissement du le système rotor où celles de palier est compris. Mathématiquement, ce dérivé peut être développé de manière suivant :

|  |  |
| --- | --- |

où :

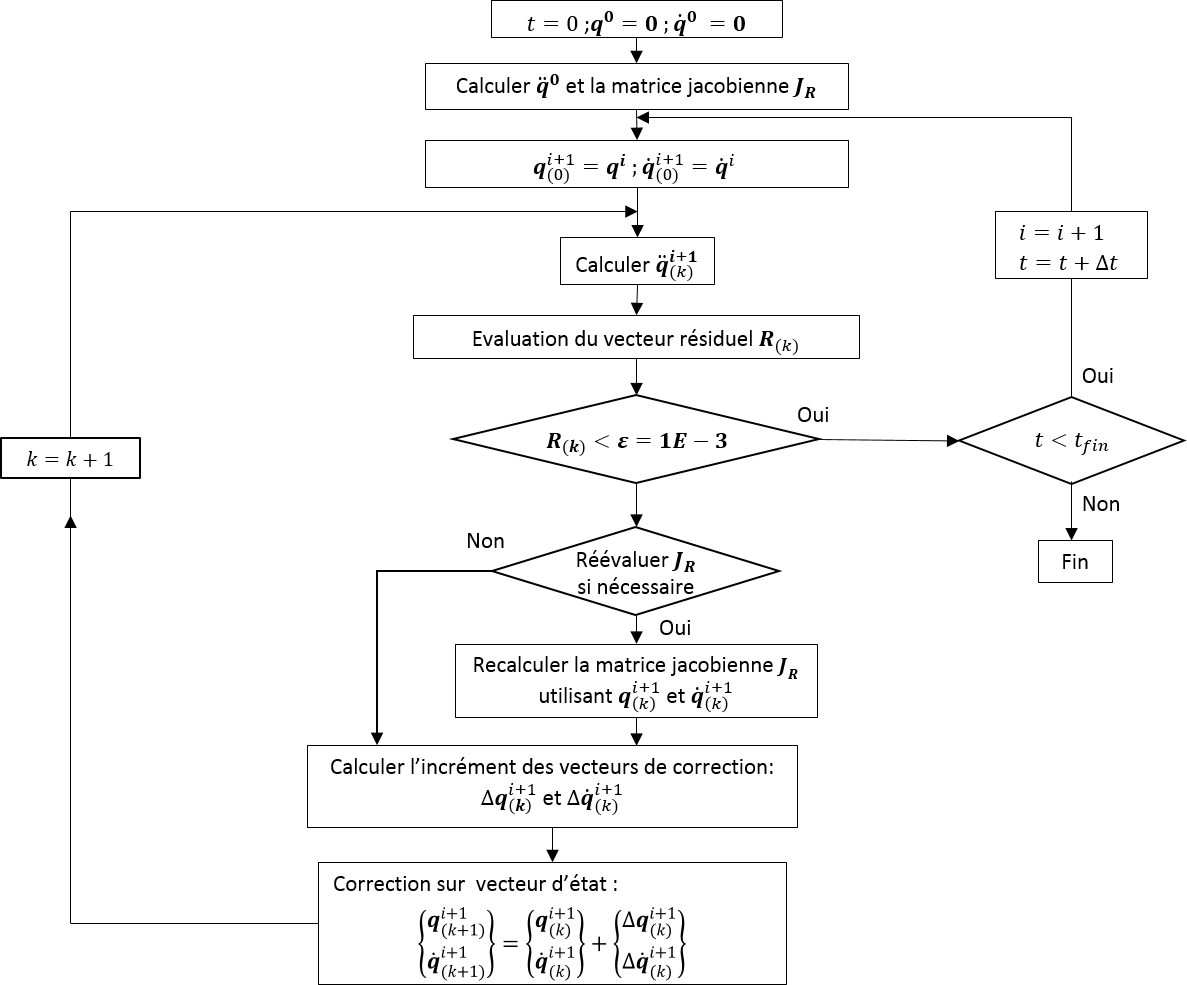


Figure 8 : algorithme utilisé pour l’analyse transitoire non linéaire

Il est constaté que la raideur et l’amortissement du palier sont nécessaires pour évaluer le dérivé de l’accélération. Ces informations sont calculées de manière numérique par différences finis comme le calcul des coefficients dynamiques du palier. En comparant avec les coefficients dynamiques, les raideurs et les amortissements utilisés ici ne sont pas obtenus à la position statique du palier. Ils sont évalué de manière dynamique de telle sorte la force hydrodynamique précise est utilisée.

Il faut souligner qu’il n’est pas nécessaire d’évaluer pour chaque itération, voire chaque instant du temps. La matrice jacobienne pourrait être valable pour les instants successives après son évaluation à puisque la raideur et l’amortissement du palier restent valable au voisinage de la position. Deux critères de réévaluation de la matrice jacobienne sont proposés dans l’algorithme utilisé qui permettent d’éviter le calcul redondant et non nécessaire de, sachant que l’évaluation de matrice est onéreux en terme de temps de calcul. Un des critères suppose que la réévaluation de la matrice est nécessaire quand la norme euclidienne du vecteur résidu augmente par rapport à son dernier évaluation. L’autre suppose simplement que la réévaluation est réalisée quand le nombre d’itération de la méthode Newton-Raphson dépasse 5. L’algorithme complet de cette méthode d’intégration temporelle est présenté dans la ***Figure 8***.

## Vibration synchrone et sa solution périodique

Puisque le régime stationnaire périodique est ciblé dans l’analyse de l’effet Morton, deux méthodes qui permettent de trouver la réponse périodique sont présentées dans la suite.

### Méthode de shooting

Le principe de cette méthode consiste à corriger une solution initiale de façon à ce qu’elle corresponde à une solution périodique. Pour cela, une stratégie itérative utilisant la méthode Newton-Raphson est appliquée. A l’itération de la méthode Newton-Raphson, un vecteur de résiduel est exprimé dans Eq.32 afin de définir la condition de périodicité.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Avec :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Où :  
: la période de la rotation du rotor

 : l’itération de Newton-Raphson  
 : le vecteur de déplacement du rotor  
 : le vecteur de vitesse du rotor  
 : le vecteur de la solution initiale (position et vitesse initiales)  
**:** le vecteur de la solution obtenue après une période à partir de la solution initiale   
 : le vecteur residuel entre la solution initale et la solution périodique

: le vecteur d’état qui représente la solution de l’équation dynamique du mouvement.

La condition de périodicité impose que l’écart entre la solution initiale et la solution périodique est nul. Afin de connaitre l’incrément de correction, une petite perturbationest introduisant au vecteur.Puis, une linéarisation appropriée de l’équation Eq.32 perturbée est réalisée en construisant un développement en série de Taylor du 1er ordre de cette équation. Il devient :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

alors

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

la matrice jacobienne peut être évaluée en calculant le dérivée du vecteur résiduel par rapport à l’état initial .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

où on peut définir la matrice de monodromie d’après [8] :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Le calcul de la matrice de monodromie peut être effectué par la définition du dérivé de la solution par rapport à la solution initiale (Eq.38).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Enfin, le calcul de la matrice jacobienne peut également écrire de manière équivalente par le vecteur résiduel  :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Le calcul de la matrice jacobienne nécessite de choisir un vecteur de perturbation suffisamment petit pour que l’évaluation soit correcte. Une fois la matrice jacobienne est obtenue, l’incrément de correction peut être déduit grâce à **Eq.35** et la solution initiale peut ainsi être corrigée par :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

L’algorithme de la méthode de shooting est résumé dans le diagramme (***Figure 9***). La solution initiale est prise égale à un vecteur d’état défini par l’utilisateur. Lorsque le vecteur résiduel est calculé par l’équation **Eq.32**, l’incrément du vecteur de correction est produit par **Eq.35** et ainsi la solution initiale est corrigée et mise à jour.

Le fait que représente la différence des positions et vitesses entre la solution initiale et la solution périodique, deux tolérances de convergence du calcul et sont appliquées séparément auxet. Quand la norme euclidienne des vecteurs résiduels et est au-dessous des deux tolérances et. La solution périodique, i.e. l’orbite périodique, est supposée avoir obtenue. Sinon, une nouvelle correction itérative de Newton-Raphson commence. Après la correction par**,** le vecteur est recalculé à partir de grâce au schéma d’intégration temporelle.Enfin, la solution périodique en utilisant la méthode de shooting est généralement obtenue en quelques itérations seulement.

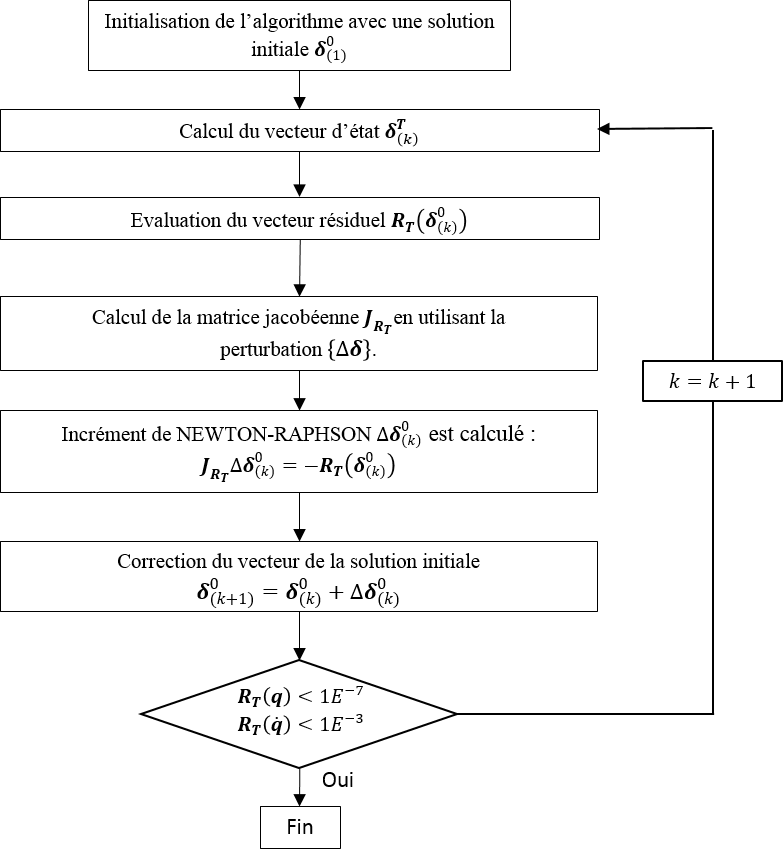


Figure 9 : Diagramme de l’algorithme de Shooting

Il faut savoir que la méthode de shooting converge non seulement vers des solutions stables mais aussi vers celles instables. Cependant, seules les solutions stables peuvent être expérimentalement obtenues. La solution instable vérifie les équations du mouvement mais n’est pas physiquement observable. C’est pourquoi, après avoir obtenu la solution périodique, sa stabilité peut être vérifiée en appliquant la théorie de Floquet [8], c’est-à-dire en calculant les valeurs propres (multiplicateurs caractéristiques de Floquet) de la matrice de monodromie .

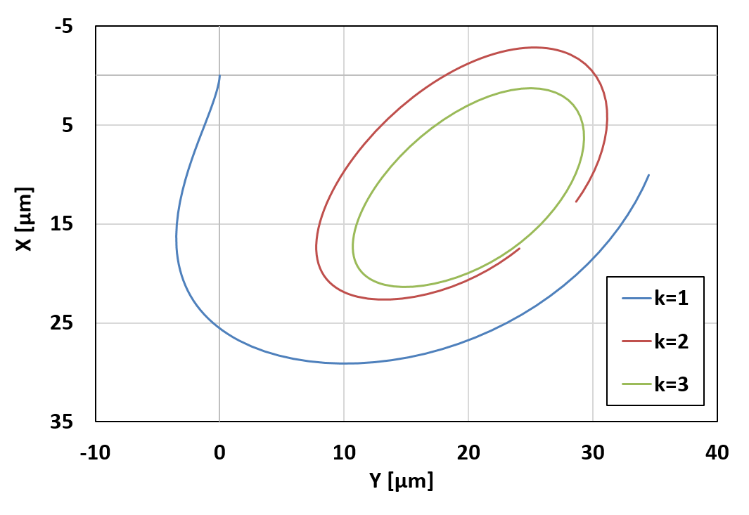


Figure 10 : exemple d’application de la méthode Shooting qui converge en 3 itérations

### Méthode classique

La méthode classique consiste à effectuer un calcul transitoire suffisamment long afin de capter la réponse périodique. Le vecteur d’état qui représente la solution des équations du mouvement est enregistrés au début de chaque périodie ( est le nombre de période de rotation) et sont comparés avec les ceux-ci stocké à la période précédente. Un vecteur résiduel est défini pour définir la condition de périodicité :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Où :  
 est la période de la rotation du rotor

est le nombre de périod de rotation

Comme utilisant la méthode de shooting, deux tolérances de convergence du calcul et sont appliquées séparément aux vecteurs résiduels de déplacement et de la vitesse. Quand la norme euclidienne des vecteurs résiduels et est au-dessous des deux tolérances et . La solution périodique, i.e. l’orbite périodique, est supposée avoir obtenue.

Comparant avec la méthode shooting, la méthode classique est plus avantageux quand l’orbite synchrone s’établie assez vite. Dans le cas où contraire, la méthode de shooting est plus efficace en terme de temps de calcul. L’algorithme de la méthode classique est présenté dans la **Figure 11**.

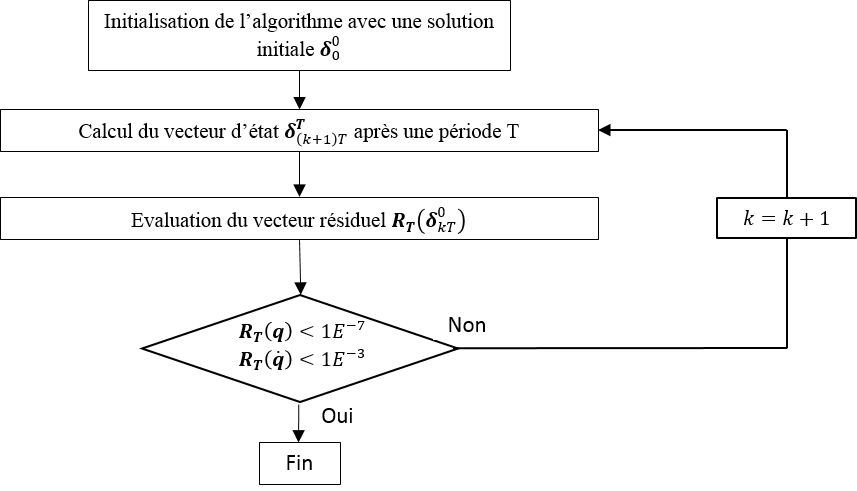


Figure 11 : Diagramme de l’algorithme classique pour trouver la solution périodique

# Influence de déformation thermique sur le comportement dynamique

La déformation thermique du rotor peut introduire le balourd thermique qui influence le comportement dynamique du rotor. Le terme « balourd thermique » est une façon vulgarisé pour expliquer l’augmentation de l’amplitude et le changement de phase de la vibration synchrone à l’origine de la déformation thermique du rotor. Dans la littérature [13], [14], Ce balourd thermique est souvent modélisée par deux approches : approche masse concentrée et approche du défaut de la fibre neutre. Dans cette section, ces deux approches sont présentées.

## Approche des masses conconcentrées

L’approche des masses concentrées modélise la source d’excitation à l’origine de déformation thermique à partir la définition du balourd, i.e. une masse décentrée de son axe de rotation par une distance. Cette approche peut être utilisée sur rotor rigide et rotor flexible. En fait, suite à l’échauffement non-homogène dans la section du palier, le rotor se déforme de manière asymétrique, ce qui engendra une déviation de sa fibre neutre par rapport à l’axe de rotation (**Figure 12**). L’influence de cette déviation de la fibre neutre sur la dynamique de rotors peut être caractérisée par une masse locale d’élément d’arbre et sa déviation. Par exemple, si toute la ligne d’arbre est modélisée par éléments d’arbre. Chaque élément possède son propre masse. La distance est la déviation due à la déformation thermique entre le centre de masse de l’élément et l’axe de rotation. Pour chaque élément, le balourd généré thermiquement est exprimé :

|  |  |
| --- | --- |

Où : , il est la phase du balourd thermique généré

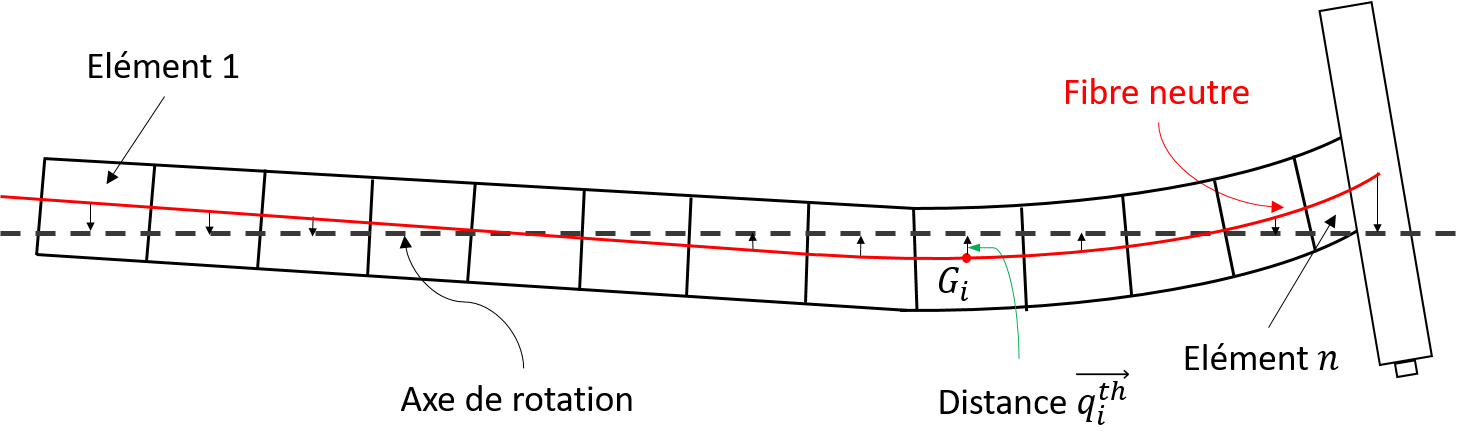


Figure 12 : défaut de la fibre neutre

La force correspondante au balourd généré au niveau de l’élément, peut être exprimée à l’aide de la matrice élémentaire ou le balourd thermique sous forme d’un vecteur**.**

|  |  |
| --- | --- |

Cette force est intégrée au système des équations différentielles de mouvement **Eq.23** en tant qu’une force extérieure qui influence le comportement dynamique du rotor. Si cette force est la seule force extérieure appliquée au système et sa phase est supposée nulle, l’équation du mouvement peut être simplifiée sous forme :

|  |  |
| --- | --- |

Supposant que la solution de l’équation Eq.44 est sous forme, l’amplitude de vibration obtenue par l’approche de masse concentré (mc) est obtenue par :

|  |  |
| --- | --- |

## Approche de défauts de la fibre neutre

Cette approche modélise l’influence de la déformation thermique comme une force interne du système qui est liée à la matrice de raideur du rotor. L’approche est réservée uniquement pour le modèle du rotor à degré de liberté. Suite à l’échauffement et la déformation thermique du rotor, la déflection de sa fibre neutre est exprimée en et la déflection élastique du rotor est notée, alors que la déflection nodale complète est. Les expressions des énergies du système rotor sous chargement thermique s’écrient :

|  |  |
| --- | --- |

Avec

* **:** énergie de déformation élastique du système rotor
* : énergie cinétique du système rotor
* : énergie dissipée du système rotor

Après l’application de l’équation de Lagrange, l’équation du mouvement est obtenue :

|  |  |
| --- | --- |

Supposant que la solution de cette équation est sous forme, l’amplitude de vibration obtenue par le défaut de fibre neutre (dfn) s’écrit :

|  |  |
| --- | --- |

A partir des expressions Eq.45 et Eq.48, si l’amortissement du système rotor est supposé infiniment petit et l’effet gyroscopique est négligé, une comparaison analytique peut être réalisée en fonction de vitesse de rotation. Quand la vitesse de rotation tend vers zéro, les deux approches donnent respectivement l’amplitude de vibration :

|  |  |
| --- | --- |

Il est constaté que l’approche masse concentrée n’a pas intégrée la déflection du rotor due à déformation thermique dans sa solution de la vibration latérale du rotor. Ainsi, quand la vitesse est nulle, son amplitude de vibration tend vers zéro alors que celle de l’approche du défaut de fibre neutre tend vers la déflection statique du rotor due à la déformation thermique.

Quand la vitesse de rotation tend vers infini, les deux approches donnent respectivement l’amplitude de vibration :

|  |  |
| --- | --- |

Il est observé que l’approche de masse concentrée tend vers une asymptote alors que celle du défaut de fibre neutre tend vers 0.

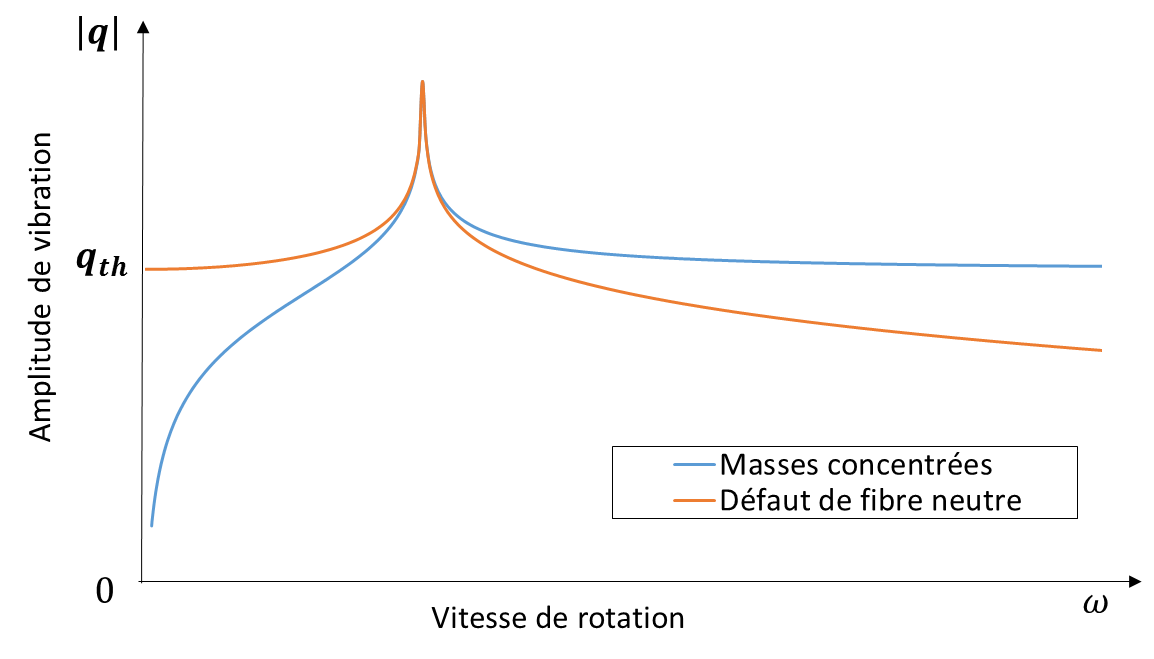


Figure 13 : Résultat de comparaison analytique de deux approche

Selon les résultats de la comparaison analytique obtenus, les deux approches donnent des influences pas tout à faire le même sur le comportement dynamique du système rotor. En fonction de la vitesse de rotation, l’écart sur l’amplitude de vibration obtenues par ces deux approches existe. Dans la littérature, grâce à sa simplicité de l’implémentation, l’approche de masse concentrée est souvent utilisée dans les analyses qualitatives de l’effet Morton comme Kirk [XX] et Lorentz [XX]. Néanmoins, lors de la précision de prédiction de l’effet Morton est visée, la démarché du défaut de fibre neutre est recommandé.

# Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter en détail les modèles numériques des rotors utilisé pour réaliser les analyses de l’effet Morton. Le modèle dynamique des rotors couplé avec le modèle non linéaire du palier a permis d’évaluer le niveau de vibration. En parallèle, le flux thermique à l’issue du modèle de palier est servi d’une condition aux limites thermiques dans le modèle thermique du rotor. La résolution du modèle thermique a permis d’évaluer le champ de température dans le temps et puis de simuler la déformation du rotor. La connaissance de la déflection de la fibre neutre du rotor due à sa déformation thermique a rendu possible d’entamer deux approches pour modéliser le balourd thermique. Dans le chapitre suivant, ces outils numériques seront utilisés pour calculer les paramètres physiques qui permet de réaliser l’analyse de l’effet Morton.

# Référence

1. Suh J, Palazzolo A. “Three-Dimensional Thermohydrodynamic Morton Effect Simulation — Part I: Theoretical Model”, ASME Journal of Tribology. 2014; 136(3):031706-031706-14. doi:10.1115/1.4027309.
2. Feng K, Kaneko S. “Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using Lobatto point quadrature”, ASME Journal of Tribology, Vol.131, April 2009
3. M. Lalanne and G. Ferraris. “Rotor dynamics prediction in engineering” , John Wiley and Sons, Chichester (UK), 1990, ISBN 0471 926337
4. J. Vance, Z. Fouad et B. Murphy, “Machinery Vibration and Rotordynamics”, John Wiley & Sons, 2010, ISBN: 9780471462132
5. M. Friswell, J. Penny, S. Garvey et A. Lees, “Dynamics of Rotating Machines” Cambridge: Cambridge University Press, 2010, doi:10.1017/CBO9780511780509
6. Lalanne, M., Ferraris, G., Genta, G., 1998, Rotordynamics prediction in engineering, Springer.
7. DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Nonlinear dynamics of a support-excited flexible rotor with hydrodynamic journal bearings. Journal of Sound and Vibration, 2014, vol. 333, n° 10, pp. 2774-2799.
8. DAKEL M., 2014, "Stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarqués", thèse de INSA de Lyon
9. Zienkiewicz O.C. et Taylor R.T. : The Finite Element Method Volume 1 : The Basics, 5th Ed, Butterworth-Heinemann, 2000.
10. Levenspiel, O., Engineering Flow and Heat Exchange, Revised Edition, Plenum Press, 1998, pp. 173-78, 182-84.
11. CodeAster© Référence R5.02.01, “Algorithme de thermique linéaire transitoire”
12. CodeAster© Référence R3.03.08, "Relations cinématiques linéaires de type RBE3"
13. Tong X, Palazzolo A, Suh J., "Rotordynamic Morton Effect Simulation With Transient, Thermal Shaft Bow," ASME J. Tribol., 138(3), p. 031705, 2016.
14. Tong X, Palazzolo A, Suh J., “A Review of the Rotordynamic Thermally Induced Synchronous Instability (Morton) Effect”. ASME. Appl. Mech. Rev. 2017;69(6):060801-060801-13. doi:10.1115/1.4037216.

# Annexe : Méthode des éléments finis pour la conduction thermique

## Formulation variationnelle du problème conduction thermique

La résolution de l’équation du transfert de chaleur au sein du rotor fait appeler la méthode des éléments finis en mécanique du solide. Afin d’appliquer la méthode, il est systématique de passer l’équation Eq.2 sous forme faible en une formulation variationnelle. Soit est le domaine étudié qui contient les frontières, la formulation faible de l’équation de la chaleur est :

|  |  |
| --- | --- |

Où est l’ensemble des champs de température qui s’annule avec la température imposée aux surfaces.

Par l’intégration par partie,

|  |  |
| --- | --- |

On obtient :

|  |  |
| --- | --- |

En appliquant les conditions aux limites suivantes :

|  |  |
| --- | --- |

La formulation variationnelle du problème est enfin obtenue :

|  |  |
| --- | --- |

## Approximation nodale élémentaire et assemblage final

le champ de température est approximé par la fonction de forme :

|  |  |
| --- | --- |

où est le vecteur des températures nodales et **N** est la fonction de forme qui permet d’approximer et interpoler la température.

Ensuite, le gradient de température s’écrit :

|  |  |
| --- | --- |

Dans le membre droite de la formulation variationnelle Eq.A.5, le terme issu de la conduction thermique devient, après assemblage sur tous les éléments :

|  |  |
| --- | --- |

où est la matrice de rigidité pour l’eﬀet de conduction.

Le terme provenant des conditions d’échange devient après assemblage sur les éléments :

|  |  |
| --- | --- |

où est la matrice de rigidité pour les effets de convection.

|  |  |
| --- | --- |

Le terme transitoire dans le membre gauche devient

|  |  |
| --- | --- |

La formulation variationnelle approchée devient donc :

|  |  |
| --- | --- |

Trouver le vecteur d’élévation de température nodale satisfaisant aux conditions aux limites en températures imposées et tel que :

|  |  |
| --- | --- |

Ainsi le système du problème de conduction discrétisé en transitoire est :

|  |  |
| --- | --- |

1. Les vitesses au niveau des paliers s’écrivent d’une manière similaire en décrivant Eq.16 par rapport au temps. [↑](#footnote-ref-1)